第16講　実数解に関する問題

16

［A］ a を正の実数とし，$f(x)=-x+\log(a+x)-\log(a-x)$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．x の方程式 $f(x)=0$ について，$-a<x<a$ の範囲にある異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $0<x<1$ のとき，$x\log x+\log(2-x)>0$ を証明せよ．

(2) a を $0<a<1$ なる定数とするとき，$0<x<a$ の範囲では，方程式 $x^a(2-x)=1$ はただ1つの解をもつことを証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　実数解に関する問題

16　x の方程式 $\sqrt{x^2+2cx+1}=x+k$ が，$x\geqq 0$ の範囲で解をもつための実数 k の満たすべき条件を求めよ．ただし c は $0\leqq c<1$ を満たす定数とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　実数解に関する問題

16

［A］ a を正の実数とし，$f(x)=-x+\log(a+x)-\log(a-x)$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．x の方程式 $f(x)=0$ について，$-a<x<a$ の範囲にある異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $0<x<1$ のとき，$x\log x+\log(2-x)>0$ を証明せよ．

(2) a を $0<a<1$ なる定数とするとき，$0<x<a$ の範囲では，方程式 $x^a(2-x)=1$ はただ１つの解をもつことを証明せよ．

【答】 ［A］ $\begin{cases} 1\text{ 個} & (0<a\leqq 2) \\ 3\text{ 個} & (a>2) \end{cases}$

［B］ 略

【解説】

［A］

$$f'(x)=-1+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}$$
$$=\frac{x^2-a(a-2)}{(a+x)(a-x)}$$

ここで $-a<x<a$ のとき $(a+x)(a-x)>0$

$$g(x)=x^2-a(a-2)$$

とおくと

(Ⅰ) $0<a\leqq 2$ のとき

$g(x)=x^2+a(2-a)\geqq 0$ より $f'(x)\geqq 0$

$\displaystyle\lim_{x\to -a+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$ であるから $f(x)=0$ の実数解の個数は１個．

(Ⅱ) $a>2$ のとき

$g(x)=x^2-a(a-2)=0 \iff x=\pm\sqrt{a(a-2)}$

よって $f(x)$ の増減は $f(0)=0$ より，$\alpha=\sqrt{a(a-2)}$ とおくと

x	$-a$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↘		↗	∞

となり $f(-\alpha)>0$，$f(\alpha)<0$　ゆえに $f(x)=0$ の実数解の個数は３個．

(Ⅰ)(Ⅱ)より

$$\begin{cases} \mathbf{1}\textbf{ 個} & (\mathbf{0}<\boldsymbol{a}\leqq \mathbf{2}) \\ \mathbf{3}\textbf{ 個} & (\boldsymbol{a}>\mathbf{2}) \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)　$f(x)=x\log x+\log(2-x)$ とおくと

$$f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{-1}{2-x}$$
$$=\log x+1+\frac{1}{x-2}$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{(x-1)(x-4)}{x(x-2)^2}>0$$
$$\lim_{x\to1-0}f'(x)=\lim_{x\to1-0}\left(\log x+1+\frac{1}{x-2}\right)=0$$

よって $0<x<1$ において $f'(x)<0$　これと，

$$f(1)=1\cdot\log 1+\log 1=0$$

より $f(x)>0$

(2)　$0<x<1$ より

$$x^a(2-x)=1 \iff \log x^a(2-x)=0$$
$$\iff a\log x+\log(2-x)=0$$

ここで $g(x)=a\log x+\log(2-x)$ とおくと(1)より

$$g(a)=a\log a+\log(2-a)>0$$

また

$$g'(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{x-2}$$

となるが，$0<x<a$ より $\dfrac{a}{x}>1$　$0<x<a<1$ より $-2<x-2<-1$　ゆえに

$-\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{x-2}>-1$ となるので $g'(x)>0$

$$\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}\{a\log x+\log(2-x)\}=-\infty$$

より $g(x)=0$ は $0<x<a$ にただ１つの解をもつ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　実数解に関する問題

16　x の方程式 $\sqrt{x^2+2cx+1}=x+k$ が，$x\geqq 0$ の範囲で解をもつための実数 k の満たすべき条件を求めよ．ただし c は $0\leqq c<1$ を満たす定数とする．

【答】　$c<k\leqq 1$

【解説】

$\sqrt{x^2+2cx+1}=x+k \iff \sqrt{x^2+2cx+1}-x=k$ より，$f(x)=\sqrt{x^2+2cx+1}-x$ とおいて，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が共有点をもつ場合を考える．

$$f'(x)=\frac{x+c}{\sqrt{x^2+2cx+1}}-1 \quad \cdots\cdots①$$

$$=\frac{(x+c)-\sqrt{x^2+2cx+1}}{\sqrt{x^2+2cx+1}}$$

$$=\frac{(x+c)^2-(x^2+2cx+1)}{\sqrt{x^2+2cx+1}\left(x+c+\sqrt{x^2+2cx+1}\right)}$$

$$=\frac{(c+1)(c-1)}{\sqrt{x^2+2cx+1}\left(x+c+\sqrt{x^2+2cx+1}\right)} \quad \cdots\cdots②$$

ここで

$x+c\leqq 0$ のとき①により　$f'(x)<0$

$x+c>0$ のとき②，$0\leqq c<1$ により　$f'(x)<0$

この結果と

$$f(0)=1,\qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2c+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2c}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=c$$

より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	c

となる．よって

$$\boldsymbol{c<k\leqq 1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。